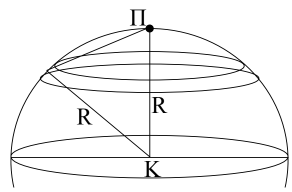
Ασκήσεις για το μάθημα Φυσική ΙΙ (Ηλεκτρομαγνητισμός) της Σχολής ΗΜΜΥ

Ενότητα 1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ (ΦΟΡΤΙΟ-ΠΕΔΙΟ-ΔΥΝΑΜΙΚΟ)

Παρατήρηση: Η απόκλιση διανύσματος σε σφαιρικές συντεταγμένες, όταν υπάρχει σφαιρική συμμετρία (δηλ. $\vec{E} = E_r\hat{r}$), είναι $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E_r\right)$. Η απόκλιση διανύσματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όταν υπάρχει αξονική συμμετρία (δηλ. $\vec{E} = E_r\hat{r}$), είναι $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rE_r\right)$.

1.1 Μια λεπτή ράβδος μήκους l, ομοιόμορφα φορτισμένη με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, βρίσκεται πάνω στον άξονα των x, με το ένα της άκρο στο σημείο $x = 0$ και το άλλο στο $x = l$.
(α) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η κατανομή σε σημείο Ρ του άξονα δεξιά της ράβδου, στη θέση x_P (με $x_P > l$). (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό της κατανομής στο ίδιο σημείο.

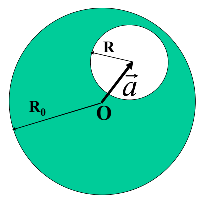
Απ.: (α) $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{x}}{x_P(x_P - l)}$. (β) $V = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 - \frac{l}{x_P}\right)$.



1.2 Ημισφαιρική επιφάνεια ακτίνας R φέρει φορτίο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ. (α) Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο Κ της ημισφαιρικής επιφάνειας. (β) Να υπολογίσετε το δυναμικό, ως προς το άπειρο, στον πόλο Π της ημισφαιρικής επιφάνειας. (γ) Να υπολογίσετε το δυναμικό, ως προς το άπειρο, στο κέντρο Κ της ημισφαιρικής επιφάνειας. Απ.: (α) $E_z = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$. (β) $V_\Pi = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0\sqrt{2}}$. (γ) $V_K = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$.

1.3 Δύο σημειακά φορτία, $+q$ και $-q/b$ $(0 < b,\ b \neq 1)$, είναι τοποθετημένα στην αρχή των αξόνων (0,0,0) και στο σημείο (a,0,0) αντίστοιχα. (α) Σε ποιο σημείο του άξονα των x το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0; (β) Δείξετε ότι η ισοδυναμική επιφάνεια $V = 0$ έχει σφαιρικό σχήμα και υπολογίστε τα γεωμετρικά της στοιχεία (κέντρο και ακτίνα).

Απ.: (α) $x = \frac{a}{1 - 1/\sqrt{b}}$. (β) Κέντρο: $\left(\frac{ab^2}{b^2 - 1}, 0, 0\right)$, ακτίνα: $\frac{ab}{\left|b^2 - 1\right|}$.



1.4 Φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας R_0, με εξαίρεση μία σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R, της οποίας το κέντρο βρίσκεται στη θέση $\vec{a}$, ως προς το κέντρο Ο της σφαιρικής κατανομής. Το φορτίο έχει σταθερή χωρική πυκνότητα ρ. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας. Απ.: $\vec{E}_{κοιλ} = (\rho/3\varepsilon_0)\vec{a}$.

1.5 Δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = c(-x\hat{x} + y\hat{y})$ είναι διατηρητικό. Υπολογίστε το αντίστοιχο δυναμικό σε όλο το χώρο. Γράψτε τις εξισώσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ οι οποίες περιγράφουν αντίστοιχα τις δυναμικές γραμμές και τις ισοδυναμικές επιφάνειες.

Απ.: Δυναμικές γραμμές: $xy = a$. Ισοδυναμικές επιφάνειες: $y^2 - x^2 = b$.

1.6 (α) Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε κάθε σημείο του χώρου βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που σχηματίζει το εν λόγω σημείο και ο άξονας Οz ενός συστήματος συντεταγμένων Οxyz, είναι κάθετο στον Οz και το μέτρο του $E(r)$ σε απόσταση r από τον άξονα Οz δίνεται από τις σχέσεις:

$$E(r) = \frac{\beta r}{2\varepsilon_0} \quad \text{για } r \leq \alpha, \quad \text{και} \quad E(r) = \frac{\alpha^2\beta}{2\varepsilon_0 r} \quad \text{για } r > \alpha, \quad \text{όπου τα } \alpha \text{ και } \beta \text{ είναι σταθερές.}$$

Να βρείτε την κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου στην οποία οφείλεται αυτό το πεδίο.

Απ.: $\rho = \beta$ για $r \leq \alpha$, $\rho = 0$ για $r > \alpha$.

1.7 Ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ δίνεται από τις σχέσεις: $\vec{E} = K(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$ για $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ και $\vec{E} = M\dfrac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ για $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$ με K και M σταθερές.

(α) Βρείτε τη (χωρική) πυκνότητα φορτίου για τις δυο περιοχές. (β) Βρείτε την ηλεκτρική ροή από την επιφάνεια σφαίρας με κέντρο το (0,0,0) και ακτίνα $R_1 < R$. (γ) Το ίδιο για σφαίρα με ακτίνα $R_2 > R$.

Απ.: (α) $\rho = 3\varepsilon_0 K$ για $r < R$, $\rho = 0$ για $r > R$. (β) $\Phi_E = 4\pi K R_1^3$. (γ) $\Phi_E = 4\pi K R^3$.

1.8 Δίνεται ηλεκτρικό πεδίο, που δεν εξαρτάται από τη συντεταγμένη z, με τη μορφή

$$\vec{E} = 0, \quad \text{για } r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} < R, \qquad \text{και} \qquad \mathbf{E} = A\frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}}{x^2 + y^2} = A\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2} = A\frac{\hat{r}_\perp}{r_\perp} \quad \text{για } r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} \ge R,$$

όπου A θετική σταθερά, και $\vec{r}_\perp = x\hat{x} + y\hat{y}$ η κάθετη απόσταση από τον άξονα των z.

(α) Δείξετε ότι το πεδίο $\vec{E}$ είναι διατηρητικό. (β) Δείξετε ότι το δυναμικό, επίσης, δεν εξαρτάται από το z. (γ) Υπολογίστε το δυναμικό παντού στο χώρο, ως προς το δυναμικό αναφοράς $V(0,0,0) = 0$.

(δ) Δείξετε ότι το συγκεκριμένο πεδίο δημιουργείται από μία επιφανειακή πυκνότητα φορτίου επί της κυλινδρικής επιφάνειεας $x^2 + y^2 = R^2$, $(-\infty < z < \infty)$, και υπολογίστε αυτή την πυκνότητα.

Απ.: (β) $V = 0$ για $r_\perp \le R$, και $V = A\ln(R/r_\perp)$ για $r_\perp \ge R$. (γ) $\sigma = \varepsilon_0 A/R$.

1.9 Η περιοχή $a \le r \le b$ περιέχει φορτίο με χωρική πυκνότητα $\rho(r) = A/r$, όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και A μια σταθερά. Στο κέντρο, $r = 0$, υπάρχει ένα σημειακό φορτίο Q.

(α) Ποια πρέπει να είναι η τιμή του A, ώστε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $a \le r \le b$ να έχει σταθερό μέτρο; (β) Ποιο είναι τότε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές $r \le a$ και $r \ge b$; (γ) Σχεδιάστε το $|\vec{E}|$ ως συνάρτηση του r.

Απ.: (α) $A = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$. (β) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ για $r \le a$ και $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{b^2}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ για $r \ge a$.

1.10 Σε περιοχή όπου επικρατεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = Cxy\hat{\mathbf{x}}$ (C μια θετική σταθερά), θεωρήστε την κλειστή επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \beta$, $0 \le z \le \gamma$.

(α) Δείξετε ότι η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου είναι ίση με $\Phi = \frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma C$. (β) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου $\rho(x,y,z,)$ σε όλο το χώρο. (γ) Βρείτε το ολικό φορτίο που περικλείεται από το παραλληλεπίπεδο, με δύο τρόπους. (δ) Είναι διατηρητικό το πεδίο;

Απ.: (β) $\rho = \varepsilon_0 C y$. (γ) $Q = \frac{1}{2}\varepsilon_0\alpha\beta^2\gamma C$. (δ) $\nabla \times \vec{E} = Cx\hat{\mathbf{z}}$ άρα το $\vec{E}$ δεν είναι διατηρητικό.

1.11 Το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποια περιοχή είναι $\vec{E} = kr^3\hat{\boldsymbol{r}}$ όπου $\vec{\boldsymbol{r}} = r\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι το διάνυσμα θέσης και k μια σταθερά. (α) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου ρ. (β) Βρείτε το ολικό φορτίο που περιέχεται σε μια σφαίρα ακτίνας R με κέντρο το σημείο Ο. Απ.: (α) $\rho = 5\varepsilon_0 k r^2$. (β) $Q = 4\pi\varepsilon_0 k R^5$.

1.12 Ηλεκτροστατικό (διατηρητικό) πεδίο περιγράφεται από τη συνάρτηση δυναμικού

$$V(x,y,z) = \begin{cases} Axy, & x > 0,\, y > 0,\, -\infty < z < +\infty \\ 0, & \pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon} \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(α) Βρείτε τις μονάδες της θετικής σταθεράς A και την εξίσωση τυχούσας ισοδυναμικής επιφάνειας με δυναμικό V_0. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ παντού. (γ) Βρείτε την εξίσωση των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$. (δ) Σχεδιάστε ποιοτικά τις ισοδυναμικές επιφάνειες και τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. (ε) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου χώρου παντού.

Απ.: (α) $y = C/(Ax)$, (β) $-A(y,x,0)$, (γ) $y = \pm\sqrt{2C_0 + x^2}$, (ε) ρ=0.